

Gruppenübung 1

Aufgabe 1 Wir betrachten das elektrische Netzwerk aus Abbildung 1. Der nichtlineare Widerstand R hat die $x-i$ -Charakteristik (Spannungs-Strom-Charakteristik) $i = R(x) = -x + \frac{1}{3}x^3$. Wir suchen die Differentialgleichung für den Spannungsverlauf x am nichtlinearen Widerstand. Wenn der Eingangsstrom $u = 0$ ist, so nennt man dieses Netzwerk van der Pol Oszillator.

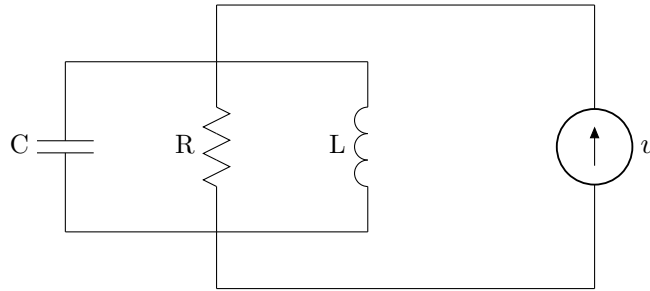


Abbildung 1: Elektrisches Netzwerk für das stromgesteuerte van der Pol-System.

- a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Spannung x auf. Schreiben Sie die Differentialgleichung in dimensionsloser Form durch die Verwendung der Zeittransformation $\tau = \frac{t}{\sqrt{CL}}$. Verwenden Sie die Abkürzung $\mu = \sqrt{\frac{L}{C}} \geq 0$ um

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = \mu u \quad (1)$$

als Endergebnis zu erhalten.

Lösung:

Das Kirchhoffsche Knotenregel (Kirchhoff's current law) gibt

$$i_C + i_L + i = u.$$

Aus der Kirchhoffschen Maschenregel folgt, dass der Spannungsabfall über der Induktion und der Spannungsabfall über der Kapazität gleich dem Spannungsabfall über dem Widerstand sind. Deswegen gilt $i_C = C \frac{dx}{dt}$ und $i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(s) ds$. Mit $i = R(x)$ erhalten wir also

$$C \frac{dx}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t x(s) ds + R(x) = u.$$

Schreibt man $'$ für $\frac{d}{dt}$ und leitet einmal nach der Zeit ab, erhält man

$$CLx'' + x + L \frac{\partial R}{\partial x} x' = Lu'.$$

Verwendet man $\tau = \frac{t}{\sqrt{CL}}$ so hat man durch Anwendung der Kettenregel

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{d\sqrt{CL}t}{dt} = \frac{dx}{dt} \sqrt{CL}$$

und somit

$$\frac{dx}{d\tau} = \sqrt{CL} \frac{dx}{dt} \quad \frac{d^2x}{d\tau^2} = CL \frac{d^2x}{dt^2} \quad \frac{du}{d\tau} = \sqrt{CL} \frac{du}{dt}.$$

Schreibt man $\dot{\cdot}$ für $\frac{d}{dt}$ so erhält man schließlich

$$\ddot{x} - \sqrt{\frac{L}{C}}(1-x^2)\dot{x} + x = \sqrt{\frac{L}{C}}\dot{u}.$$

Mit den Abkürzung aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = \ddot{x} + \mu \frac{\partial R}{\partial x} \dot{x} + x = \mu \dot{u}.$$

- b) Linearisieren Sie die Spannungsdifferentialgleichung um die Ruhelage $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$. Leiten Sie aus dem Resultat eine Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormform ab.

Lösung:

Die Linearisierung der Differentialgleichung (1) um die Ruhelage $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ ist unmittelbar gegeben durch

$$\ddot{x} - \mu \dot{x} + x = \mu \dot{u}.$$

Die zugehörige Zustandsraumdarstellung in Regelungsnormform ist

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

- c) Führen Sie nun die Schritte aus b) in umgekehrter Reihenfolge aus und diskutieren Sie ihre Lösung.

Lösung:

Die Zustandsraumdarstellung ist nicht eindeutig und hängt von der Wahl der Zustände ab. Wir wählen im folgenden

$$y_1 = x \quad \text{und} \quad y_2 = \mu u - \dot{x} - \mu R(x).$$

Es gilt unmittelbar $\dot{y}_1 = \dot{x} = -y_2 - \mu R(y_1) + \mu u$ und $\dot{y}_2 = \mu \dot{u} - \ddot{x} - \mu \frac{\partial R}{\partial x} \dot{x} = x = y_1$ und damit

$$\dot{y}_1 = -y_2 + \mu y_1 - \mu \frac{1}{3} y_1^3 + \mu u$$

$$\dot{y}_2 = y_1.$$

In linearisierter Form haben wir also das System

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\mu & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- d) Für welche Werte von μ ist das linearisierte System aus b) steuerbar?

Lösung:

Die Steuerbarkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}.$$

D.h. das System ist immer steuerbar.

- e) Für welche Werte von μ ist das linearisierte System b) beobachtbar?

Lösung:

Mit der Zustandsraumdarstellung aus b) ergibt sich die Beobachtbarkeitsmatrix zu

$$\begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & \mu^2 \end{bmatrix}.$$

Somit ist das System genau dann beobachtbar wenn $\mu \neq 0$.

- f) Entwerfen Sie einen Luenbergerbeobachter für die Zustandsraumdarstellung aus b).

Lösung:

Der Luenbergerbeobachter hat die Dynamik

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + l(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= c^T \hat{x}.\end{aligned}$$

Für den Beobachterfehler $e = x - \hat{x}$ ergibt sich dann die Dynamik

$$\dot{e} = (A - lc^T)e.$$

Um den Beobachterfehler asymptotisch gegen Null gehen zu lassen, verlangen wir, dass die Realteile der Eigenwerte der Dynamikmatrix $A - lc^T$ negativ sind. Nun ist im konkreten Fall

$$A - lc^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \mu l_1 \\ -1 & \mu - \mu l_2 \end{bmatrix}.$$

D.h. das charakteristische Polynom χ der Dynamikmatrix $A - lc^T$ ist

$$\chi = s^2 - (\mu - \mu l_2)s + (1 - \mu l_1).$$

Aus dem Hurwitzkriterium (der Vorzeichenregel) folgt, dass wir $\mu - \mu l_2 < 0$ und $1 - \mu l_1 > 0$ wählen müssen, also

$$l_2 > 1 \quad l_1 < \frac{1}{\mu}.$$

- g) Analysieren Sie das linearisierte Zustandsraummodell aus b) ($\mu \geq 0$). Genauer, berechnen Sie die Eigenwerte der Linearisierung in Abhängigkeit von μ und zeichnen Sie den qualitativen Verlauf der Eigenwerte in der komplexen Ebene ein. Zeichnen Sie die Phasenportraits für $\mu = 0$ und $\mu = 4$. Berechnen Sie, falls nötig, die Eigenvektoren.

Lösung:

Das charakteristische Polynom der Dynamikmatrix ist

$$\chi(s) = s^2 - \mu s + 1 = \left(s - \frac{\mu}{2}\right) + \frac{4 - \mu^2}{4}.$$

D.h. die Eigenwerte λ_1, λ_2 sind gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}) \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}).$$

Somit hat das System für $\mu < 2$ ein paar konjugiert komplexer Eigenwerte und für $\mu > 2$ zwei positive, reelle Eigenwerte.

Im Falle $\mu = 0$ ist das System der harmonische Oszillator. Das Phasenportrait sind als konzentrische Kreise. Für $\mu = 4$ hat man die Eigenwerte $2 + \sqrt{3}$ und $2 - \sqrt{3}$ und die Eigenvektoren

$$\begin{bmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- h) Entwerfen Sie eine stabilisierende Zustandsrückführung für das linearisierte System.

Lösung:

Wir haben das System in Regelungsnormalform gegeben, damit ist die Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises gegeben durch

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - k_1 & \mu - k_2 \end{bmatrix}.$$

Wählen wir also nach dem Hurwitzkriterium (der Vorzeichenregel), $k_2 > \mu$ und $k_1 > -1$, so ist der geschlossene Kreis stabil.